对数的换底公式与对数恒等式

复习与回顾

一、指数与对数的互换

$$a^b = N \Leftrightarrow b = log_a N$$

指数式　　　　对数式

二、积、商、幂的运算性质

如果 $a>0$ 且 $a\neq 1$，$M>0$，$N>0$，则

(1) $log_a(MN) = log_a M + log_a N$

(2) $log_a \frac{M}{N} = log_a M - log_a N$

(3) $log_a M^n = n\cdot log_a M \quad (n\in R)$

课前小练习

已知 $lg\,2=0.3010$，$lg\,3=0.4771$，求 $log_2 3$.

解： 设 $\boxed{log_2 3 = x}$，则 $2^x=3$ 对数式转换为指数式

两边都取以10为底的对数，得 $lg\,2^x = lg\,3$ $\therefore x\,lg\,2 = lg\,3$

将指数x提到前面当系数

整理后得 $\boxed{x = \dfrac{lg\,3}{lg\,2}}$

$$\therefore log_2 3 = \frac{lg\,3}{lg\,2} = \frac{0.4771}{0.3010} \approx 1.5851$$

在这个过程中，我们用到了对数的换底公式哦！

学习新知

对数的换底公式

$$\log_a N=\frac{\log_c N}{\log_c a}\quad(a>0\text{且}a\neq1，c>0\text{且}c\neq1，\text{真数 }N>0)$$

公式的推导过程请看微课1

说明：给定一个底数c，任何对数都可以转化为以c为底的对数相除

特别地：

$$\log_a N=\frac{\lg N}{\lg a}\quad(a>0\text{且}a\neq1，N>0)$$

$$\log_a N=\frac{\ln N}{\ln a}\quad(a>0\text{且}a\neq1，N>0)$$

学习新知

换底公式的推导过程

$$\log_a N=\frac{\log_c N}{\log_c a}$$ （$a>0$且$a\neq1$，$c>0$且$c\neq1$，真数 $N>0$）

证明： 设$\boxed{\log_a N=x}$，则 $a^x=N$ 对数式转换为指数式

两边取以 c 为底的对数，得到： $\log_c a^x=\log_c N$

将指数 x 提前作为系数，即： $x\log_c a=\log_c N$ 将指数x提到前面当系数

整理可得： $\boxed{x=\frac{\log_c N}{\log_c a}}$

所以 $\log_a N=\frac{\log_c N}{\log_c a}$

例题教学

例题讲解请看微课2

例1　计算 $log_4 9 \cdot log_3 8$

例2　计算 $log_2 5 \cdot log_5 7 \cdot log_7 8$

例题教学

例题讲解请看微课2

例1　计算 $\log_4 9 \cdot \log_3 8$

解答：$\log_4 9 \cdot \log_3 8 = \frac{\lg 9}{\lg 4} \cdot \frac{\lg 8}{\lg 3} = \frac{\lg 3^2}{\lg 2^2} \cdot \frac{\lg 2^3}{\lg 3} = \frac{2\lg 3}{2\lg 2} \cdot \frac{3\lg 2}{\lg 3} = 3$

例2　计算 $\log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$

解答：$\log_2 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8 = \frac{\lg 5}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 7}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 8}{\lg 7} = \frac{\lg 5}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 7}{\lg 5} \cdot \frac{\lg 2^3}{\lg 7}$

$= \frac{\lg 5}{\lg 2} \cdot \frac{\lg 7}{\lg 5} \cdot \frac{3\lg 2}{\lg 7} = 3$

同步练习

练习1　求 $log_{27}8 \cdot log_{32}9$ 的值

练习2　求证：$log_a b \cdot log_b c \cdot log_c a = 1$

同步练习　答案

练习1　求 $\log_{27} 8 \cdot \log_{32} 9$ 的值

解答： $\log_{27} 8 \cdot \log_{32} 9 = \frac{\lg 8}{\lg 27} \cdot \frac{\lg 9}{\lg 32} = \frac{\lg 2^3}{\lg 3^3} \cdot \frac{\lg 3^2}{\lg 2^5} = \frac{3\lg 2}{3\lg 3} \cdot \frac{2\lg 3}{5\lg 2} = \frac{2}{5}$

练习2　求证：$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$

证明： $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = \frac{\lg b}{\lg a} \cdot \frac{\lg c}{\lg b} \cdot \frac{\lg a}{\lg c} = 1$

学习新知

对数恒等式

设 $a^b = N$ ($a>0$ 且 $a\neq1$)，由对数定义得，$b = \log_a N$，则

$$a^{\log_a N} = N \qquad (a>0 \text{ 且 } a\neq1)$$

这个式子叫对数恒等式

再观察一下这个公式，你有什么发现？ $\log_a a^N = N$

例题教学

例3 求下列各式的值

(1) $2^{\log_2 7}$

(2) $4^{\log_2 7}$

(3) $2^{1+\log_2 7}$

例题教学 答案

例3 求下列各式的值

(1) $2^{\log_2 7}$

(2) $4^{\log_2 7}$

(3) $2^{1+\log_2 7}$

解答：(1) $2^{\log_2 7}=7$

(2) $4^{\log_2 7}=(2^2)^{\log_2 7}=2^{2\log_2 7}=2^{\log_2 7^2}=2^{\log_2 49}=49$

(3) $2^{1+\log_2 7}=2^1\cdot 2^{\log_2 7}=2\times 7=14$

同步练习

练习3 求下列各式的值

(1) $3^{log_3 11}$

(2) $25^{log_5 3}$

(3) $7^{2+log_7 3}$

同步练习 答案

练习3 求下列各式的值

(1) $3^{\log_3 11}$

(2) $25^{\log_5 3}$

(3) $7^{2+\log_7 3}$

解答： (1) $3^{\log_3 11}=11$

(2) $25^{\log_5 3}=(5^2)^{\log_5 3}=5^{2\log_5 3}=5^{\log_5 3^2}=5^{\log_5 9}=9$

(3) $7^{2+\log_7 3}=7^2\cdot 7^{\log_7 3}=49\times 3=147$

课堂小结

1、换底公式: $\log_a N=\dfrac{\log_c N}{\log_c a}$ （$a>0$且$a\neq1$，$c>0$且$c\neq1$，真数 $N>0$）

2、拓展：换底公式的几个常用推论

(1) $\log_a b\cdot\log_b a=1$ $\log_a b\cdot\log_b c\cdot\log_c a=1$

(2) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

(3) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ （$a>0$且$a\neq1$，$b>0$）

3、对数恒等式 $a^{\log_a N}=N$ （$a>0$ 且 $a\neq1$）

如果前面的知识点都掌握了，可以尝试一下后面的挑战哦！

拓展提高

1、计算：$log_9 27 =$

小提示：

$$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m}\log_a b$$

2、已知 $\log_a x = 2$，$\log_b x = 3$，$\log_c x = 6$，求 $\log_{abc} x$ 的值

小提示：要用到这些公式哦！

① $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

② $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

拓展提高　答案

1、 $log_9 27 = log_{3^2} 3^3$

$$= \frac{3}{2} log_3 3 = \frac{3}{2}$$

2、已知$\log_a x=2$，$\log_b x=3$，$\log_c x=6$，求$\log_{abc} x$的值。

解：$\log_a x = 2 \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{2}$

$\log_b x = 3 \Rightarrow \log_x b = \frac{1}{3}$.

$\log_c x = 6 \Rightarrow \log_x c = \frac{1}{6}$

则：$\log_x abc = \log_x a + \log_x b + \log_x c$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$

则 $\log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = 1$.

课后作业

请打开课后作业纸，完成后拍照上传

一、选择题：

1、 $log_7 13$ 等于（　　）

A. $log_{13} 7$　　B. $\frac{lg\ 13}{lg\ 7}$　　C. $\frac{log_{-5} 13}{log_{-5} 7}$　　D. $\frac{13}{7}$

2、$log_4 7 \cdot log_7 4$ 等于（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 4　　D. 7

二、计算下列各式：

（1） $log_{25} 49 \cdot log_7 125 =$

（2） $log_4 \frac{1}{9} \cdot log_3 \frac{1}{7} \cdot log_{49} \frac{1}{2} =$

（3） $3^{1+\log_3 2} =$

三、求证：$log_a b \cdot log_b a = 1$

四、已知 $log_2 3 = a$，$log_2 5 = b$ ，求 $log_4 15$ 的值