§4.2　对数与对数函数

4.2.1　对数的概念及性质

学习新知

观察与思考：

(1)一张长方形纸片对折多少次变成 32 层？

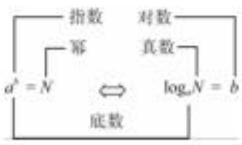
(2)已知 $3^x=9$，$x=$？如果 $3^x=8$，x 又为多少呢？

上面提出的问题，实际上是已知底数和幂的值，求指数的问题. 对于问题 1 和问题 2 中的第一问，我们很容易估算出来，但对于问题 2 中的第二问，我们是估算不出来的. 需要引入一种新的运算，一种已知底数和幂求指数的运算.

一般地，**如果 $a^x=N(a>0$，且 $a\neq1)$，那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$，其中 a 叫做对数的底数(简称底)，N 叫做真数.**

例如，$2^3=8$ 可记作 $3=\log_2 8$，3 叫做以 2 为底 8 的对数.

式子 $a^b=N$ 叫做指数式，$\log_a N=b$ 叫做对数式. 它们关系如下：



根据对数的定义关系，对数有以下性质.

(1)零和负数没有对数；

(2)$\log_a 1=0$，即 1 的对数为 0；

(3)$\log_a a=1$，即底数的对数为 1.

其中，$a>0$，且 $a\neq1$.

试一试：请同学们自己推导这几条性质.

我们把以 10 为底的对数叫做常用对数，N 的常用对数 $\log_{10} N$ 简记作 lg N. 例如，$\log_{10}5$ 简记作 lg 5.

e 是一个重要的常数，是无理数，它的值为 2.718 28…，科学技术中常以 e 作为对数的底数，**以 e 为底的对数叫做自然对数. N 的自然对数 $\log_e N$ 简记作 ln N.** 例如，$\log_e 8$ 简记作 ln 8.

运用新知

例1 把下列指数式写成对数式.

(1)$5^4=625$； (2)$8^{\frac{4}{3}}=16$； (3)$10^{-2}=0.01$.

解 (1)$\log_5 625=4$. (2)$\log_8 16=\frac{4}{3}$. (3)$\lg 0.01=-2$.

例2 把下列对数式写成指数式.

(1)$\log_3 243=5$； (2)$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{27}=3$； (3)$\ln 1=0$.

解 (1)$3^5=243$. (2)$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$. (3)$e^0=1$.

例3 求下列各式中真数N的值.

(1)$\lg N=-3$； (2)$\log_8 N=\frac{2}{3}$.

分析 求真数通常需要把对数式写成指数式.

解 (1)由$\lg N=-3$，得$N=10^{-3}=0.001$.

(2)由$\log_8 N=\frac{2}{3}$，得$N=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$.

例4 求下列各式中对数x的值.

(1)$\log_2 8=x$； (2)$\log_4 4^5=x$.

解 (1)由$\log_2 8=x$，得$2^x=8$，即$2^x=2^3$，

所以$x=3$.

(2)由$\log_4 4^5=x$，得$4^x=4^5$，

所以$x=5$.

例5 求下列各式的值.

(1)$\log_5 1$； (2)$\log_7 7$； (3)$\lg 10$； (4)$\ln e$.

分析 利用性质："1的对数为0"和"底数的对数为1"直接得答案，不必写成指数式.

解 (1)$\log_5 1=0$； (2)$\log_7 7=1$；

(3)$\lg 10=\log_{10} 10=1$； (4)$\ln e=\log_e e=1$.

同步练习

1. 把下列指数式写成对数式.

(1)$3^6=729$； (2)$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=8$； (3)$25^{\frac{1}{2}}=5$； (4)$10^3=1\ 000$.

2. 把下列对数式写成指数式.

(1)$\log_4 64=3$； (2)$\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$； (3)$\lg 0.1=-1$；

(4)$\ln\sqrt{e}=\dfrac{1}{2}$.

3. 求下列各式中真数 N 的值.

(1)$\log_{27}N=\dfrac{2}{3}$；　(2)$\ln N=0$；　(3)$\lg N=1$.

4. 求下列各对数的值.

(1)$\log_6 36$；　(2)$\log_4\dfrac{1}{4}$；　(3)$\lg 100$；　(4)$\log_3 3^2$.

5. 求下列各对数的值.

(1)$\log_{11}11$；　(2)$\log_{\frac{1}{2}}1$；　(3)$\lg 10+\ln e$.

4.2.2　积、商、幂的对数

学习新知

观察与思考：

填写表 4-7，从数据中分析等量关系，猜想对数的运算性质，并与同学交流.

表 4-7

	第一组			第二组			第三组	
式	$\log_2 8$	$\log_2 32$	$\log_2(8\times32)$	$\lg 1\,000$	$\lg 100\,000$	$\lg\dfrac{1\,000}{100\,000}$	$\lg 10^5$	$5\ln 10$
值								
式	$\log_3 9$	$\log_3 81$	$\log_3(9\times81)$	$\lg 10\,000$	$\lg 100$	$\lg\dfrac{10\,000}{100}$	$\log_2 4^3$	$3\log_2 4$
值								
猜想性质	两个正数的积的对数，等于______							

我们可以得到两个正数的积、商、幂的对数运算性质.

(1)积的对数：两个正数的积的对数，等于同一底数的这两个数的对数的和．即

$$\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N\ (a>0，且\ a\neq1，M>0，N>0).$$

证明　设 $\log_a M=p$，$\log_a N=q$，

根据对数的定义，得　$M=a^p$，$N=a^q$，

所以　$M\cdot N=a^p\cdot a^q=a^{p+q}$.

把指数式化为对数式，得

$$\log_a(MN)=p+q=\log_a M+\log_a N.$$