第八章　直线和圆的方程

8．2 直线的方程

创设情境 兴趣导入

我们知道，方程$x-y+1=0$ 的图像是一条直线，那么方程的解与直线上的点之间存在着怎样的关系呢？

动脑思考 探索新知

已知直线的倾角为45°，并且经过点$P_0(0,1)$，由此可以确定一条直线l. 设点$P_1(x_1,y_1)$为直线l上不与点$P_0(0,1)$ 重合的任意一点（图8－6）.

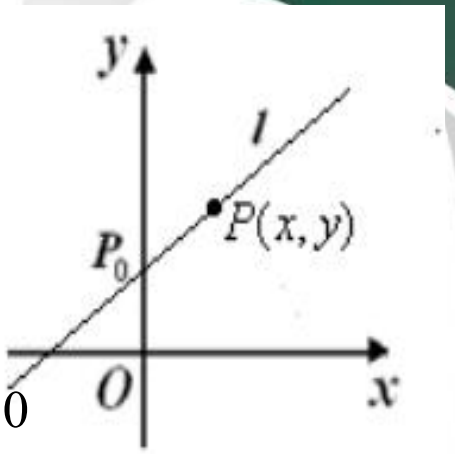


图8－6

$$k=\tan 45^\circ=\frac{y-1}{x-0}$$

即

$$x-y+1=0$$

这说明直线上任意一点的坐标都是方程 $x-y+1=0$ 的解，即 $x_1-y_1+1=0$ 则

$$\frac{y_1-1}{x_1-0}=k=\tan 45^\circ$$

已知直线的倾角为45°，并且经过点 $P_0(0,1)$ ，只可以确定一条直线 l. 这说明点$P_1(x_1,y_1)$ 在经过点 $P_0(0,1)$ 且倾角为 45°的直线上.

动脑思考 探索新知

一般地，如果直线（或曲线）L与方程 $F(x,y)=0$ 满足下列关系：

⑴ 直线（或曲线）上的点的坐标都是二元方程 $F(x,y)=0$ 的解；

⑵ 以方程 $F(x,y)=0$ 的解为坐标的点都在直线（或曲线）L上

那么，直线（或曲线）L叫做二元方程的直线（或曲线），方程 $F(x,y)=0$ 叫做直线L（或曲线）的方程. 记作曲线$L:F(x,y)=0$或者曲线 $F(x,y)=0$

动脑思考 探索新知

求经过点$P_0(x_0,y_0)$，且斜率为k的直线l的方程（如图8－7）.

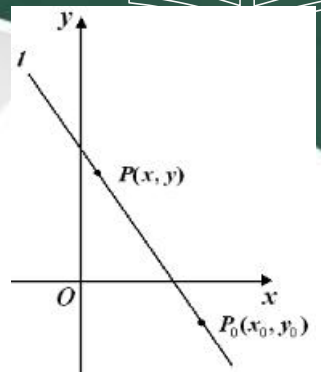


图8－7

在直线l上任取点$P(x,y)$（不同于P_0点），由斜率公式可得

$$k=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

即

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

显然，点$P_0(x_0,y_0)$的坐标也满足上面的方程.

方程

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (8.4)$$

叫做直线的**点斜式方程**. 其中点$P_0(x_0,y_0)$为直线上的点，k为直线的斜率.

巩固知识 典型例题

例1 在下列各条件下，分别求出直线的方程：

（1）直线经过点 $P_0(1,2)$， 倾角为 45°；

（2）直线经过点 $P_1(3,2)$，$P_2(-1,-1)$.

解 （1）由于 $\alpha = 45^\circ$，故斜率 $k = \tan\alpha = \tan 45^\circ = 1$，

又因为直线经过点 $P_0(1,2)$，所以直线方程为

$$y-2=1\cdot(x-1),$$

即
$$x-y+1=0.$$

（2）直线过点 $P_1(3,2)$，$P_2(-1,-1)$，由斜率公式得

$$k=\frac{-1-2}{-1-3}=\frac{3}{4},$$

故直线的方程为 $y-2=\frac{3}{4}(x-3)$

即
$$3x-4y-1=0.$$

运用知识 强化练习

在下列各条件下，分别求出直线的方程：

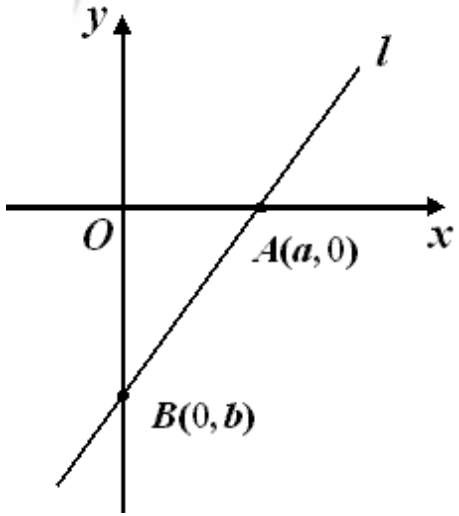
(1) 斜率为 3 ，且通过 $p_0(2,3)$

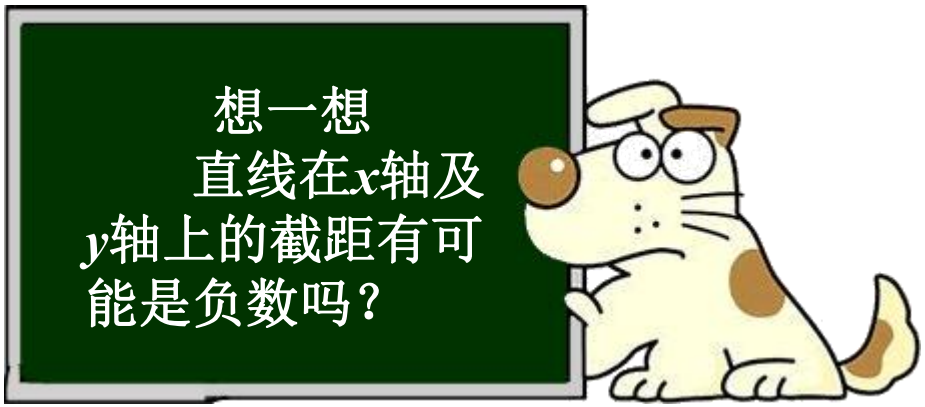
（2）直线经过点（1，-2），倾角为 $\frac{5\pi}{6}$

（3）直线经过点 $(-5,3),(3,1)$

创设情境 兴趣导入

如图所示，设直线l与x轴交于点$A(a,0)$，与y轴交于点$B(0,b)$. 则a叫做直线l**在x轴上的截距**（或**横截距**）；b叫做直线l**在y轴上的截距**（或**纵截距**）.





动脑思考 探索新知

设直线在y轴上的截距是b，即直线经过点$B(0,b)$，且斜率为k.

则这条直线的方程为

$$y-b=k(x-0).$$

即 $$y=kx+b.$$

方程

$$y=kx+b \qquad (8.5)$$

叫做直线的**斜截式方程**．其中k为直线的斜率，b为直线在y轴上的截距．

巩固知识 典型例题

例2 设直线l的倾角为60°，并且经过点P（2，3）.
（1）写出直线l的方程；
（2）求直线l在y轴的截距.

解 （1）由于直线l的倾角为60°，故其斜率为

$$k = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

又直线经过点P（2，3），由公式(8.4)得知直线的方程为

$$y - 3 = \sqrt{3}(x - 2)$$

（2）将上面的方程整理为

$$y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 3$$

这是直线的斜截式方程，由公式(8.4)知直线l的在y轴的截距为$3 - 2\sqrt{3}$

运用知识 强化练习

1．作出$y=\frac{1}{2}x$的图像，并判断点$Q(4,2)$,$P(-2,3)$是否为图像中的点.

2．设点$P(a,1)$在直线 $3x+y-5=0$上，求a的值.

3．根据下列各直线满足的条件，写出直线的方程：

（1）过点 $(5,2)$，斜率为3；

（2）在y轴上的截距为5，斜率为4.

4．分别求出直线 $y-8=5(x-1)$ 在x轴及y轴上的截距.

创设情境 兴趣导入

$y-y_0=k(x-x_0)$ 可化为 $kx-y+y_0-kx_0=0$

$y=kx+b$ 可化为 $kx-y+b=0$

由此看到，直线的点斜式方程与斜截式方程都可化为二元一次方程的一般形式$Ax+By+C=0$

那么，能不能说，一般形式的二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 就是直线的方程呢？

动脑思考 探索新知

（1）当 $A \neq 0$，$B \neq 0$ 时，二元一次方程可化为 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$ 表示斜率为 $k=-\frac{A}{B}$，纵截距 $b=-\frac{C}{B}$ 的直线.

（2）当 $A=0$ $B \neq 0$ 时，方程为 $y=-\frac{C}{B}$，表示经过点 $P\left(0,-\frac{C}{B}\right)$ 且平行于x轴的直线（如图8－9）.

（3）当 $A \neq 0$ $B=0$ 时，方程为 $x=-\frac{C}{A}$，表示经过点 $P\left(-\frac{C}{A},0\right)$ 且平行于y轴的直线（如图8－10）.

所以，二元一次方程 $Ax+By+C=0$（其中A、B不全为零）表示一条直线.

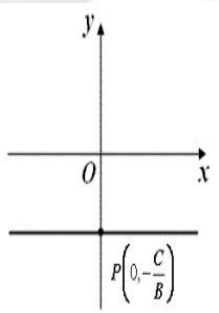


图8－9

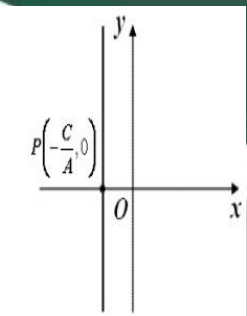


图8－10

方程

$$Ax+By+C=0 \quad （其中A、B不全为零） \qquad （8.6）$$

叫做直线的**一般式方程**.

巩固知识 典型例题

例3 将方程 $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$ 化为直线的一般式方程，并分别求出该直线在x轴与y轴上的截距.

解 由 $y-2=\frac{1}{2}(x+1)$

得 $3x-2y+6=0$

这就是直线的一般式方程．在方程中令$y=0$，则 $x=-2$，故直线在x轴上的截距为 -2；令 $x=0$，则 $y=3$

故直线在y轴上的截距为3.

运用知识 强化练习

1．将下列直线方程化为一般方程：

（1） $y=\frac{1}{2}x-2$

（2） $y-2=-\frac{3}{4}(x+1)$

2．已知 ΔABC的三个顶点分为$A(-3,0)$ $B(2,-1)$ ，$C(-2,3)$ 求AC边上的中线所在直线的方程.

理论升华 整体建构

直线的点斜式方程、斜截式方程、一般式方程

方程$y-y_0=k(x-x_0)$,叫做直线的**点斜式方程**．其中点$p_0(x_0,y_0)$为直线上的点，k为直线的斜率．

方程$y=kx+b$叫做直线的**斜截式方程**．其中k为直线的斜率，b为直线在y轴上的截距．

方程$Ax+By+C=0$（其中A、B不全为零） 叫做直线的**一般式方程**.